

Chapitre 2

Rappels de Mécanique des Milieux Continus

2.1 Introduction

La mécanique des milieux continus est construite à partir du fait que l'évolution «macroscopique» d'un système physique est régie par les lois de conservation de la physique, conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ainsi que par les lois fondamentales de la thermodynamique, conservation de l'énergie et production d'entropie. Cette observation est à la base de la mécanique des milieux continus et en constitue sa puissance du fait même de son degré de généralité et d'abstraction. En ce sens, elle se place dans le cadre de la mécanique classique, non relativiste et, par ses attaches à la thermodynamique, elle s'étend à la thermique. Les lois de conservation et de la thermodynamique déterminent l'évolution du système physique dès lors que l'on spécifie les relations de comportement.

En corollaire, ces lois générales de la physique nous indiquent que certaines quantités n'obéissent à aucune loi de conservation comme la pression ou l'entropie.

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement ces lois fondamentales qui serviront de base au reste du cours.

2.2 Rappels sur la cinématique des milieux continus

2.2.1 Mouvement d'un milieu continu

La cinématique fournit un cadre spatio-temporel pour la description des mouvements. Dans ce qui suit, nous nous placerons pour simplifier dans des espaces euclidiens de dimension $n_d \leq 3$, muni d'une certaine chronologie.

Un milieu physique peut être modélisé comme un continuum si, pour toute configuration de ce milieu, il correspond une région Ω dans l'espace euclidien, de dimension n_d , telle que chaque point de cette région soit occupé par un point matériel qui doit s'entendre comme un petit volume, par rapport à la taille du système, contenant un grand nombre de «particules» et sur lequel on peut définir des grandeurs moyennes, comme la vitesse, la température ou la pression.

Considérons un milieu continu occupant à l'instant $t = 0$, une région ouverte $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^{n_d}$. On considérera ici cette configuration initiale comme la configuration de référence. A tout instant

$t > 0$, ce milieu occupe une région $\Omega(t)$. Connaître le mouvement d'un milieu continu revient à connaître l'application qui à tout point $\mathbf{M}_0 \in \Omega_0$ fait correspondre un point $\mathbf{M}_t \in \Omega(t)$. Si les configurations Ω_0 et $\Omega(t)$ sont respectivement rapportée au système de coordonnées cartésiennes $\{X_i, i = 1, \dots, n_d\}$ et $\{x_i, i = 1, \dots, n_d\}$, le mouvement peut alors être défini par :

$$x_i = \phi_i(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

Les coordonnées \mathbf{X} sont les coordonnées de Lagrange et la configuration Ω_0 est parfois appelée configuration de Lagrange. Les coordonnées \mathbf{x} sont les coordonnées d'Euler du point matériel à l'instant t et la configuration $\Omega(t)$ est parfois appelée configuration d'Euler. ou configuration spatiale. La fonction ϕ est biunivoque et l'on peut définir la fonction inverse :

$$X_i = \psi_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

où $\psi = \phi^{-1}$.

Remarque 1. Si les configurations Ω_0 et $\Omega(t)$ sont rapportées au même repère, on peut définir le vecteur déplacement : $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{M}_0\mathbf{M}_t}$ et :

$$x_i = X_i + u_i(\mathbf{X}, t) \quad (2.3)$$

2.2.2 Champ de vitesse

Le vecteur vitesse, à l'instant t , d'un point matériel de coordonnées de Lagrange \mathbf{X} est simplement défini par :

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$

Le champ de vitesse $\vec{\mathbf{V}}$ des points matériels $\mathbf{M}_t \in \Omega(t)$ est ainsi défini comme une fonction de t et des coordonnées de Lagrange \mathbf{X} : $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$. On parle alors de description lagrangienne du champ de vitesse.

On peut naturellement définir ce champ de vitesse comme une fonction des coordonnées eulériennes de $\mathbf{M}_t \in \Omega(t)$ en utilisant la fonction ψ : $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{v}}([\psi(\mathbf{x}, t)], t) = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ On parle alors de description eulérienne du champ de vitesse.

Remarque 2. En mécanique des fluides, il est souvent préféré une description eulérienne dans laquelle les coordonnées sont les coordonnées eulériennes et le déplacement remplacé par la connaissance du champ de vitesse eulérien $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ à chaque instant t .

Remarque 3. Lorsque le champ eulérien ne dépend pas du temps, le mouvement est dit permanent et le champ de vitesse stationnaire.

2.2.3 Champ d'accélération

On définit le champ d'accélération du point \mathbf{M} , de coordonnées lagrangienne \mathbf{X} , à l'instant t comme :

$$\vec{\mathbf{\Gamma}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \vec{\gamma}(\mathbf{X}, t) \quad (2.5)$$

Il s'agit alors d'une description lagrangienne du champ d'accélération.

On peut également passer à une description eulérienne du champ d'accélération : $\vec{\Gamma} = \vec{\gamma}([\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)], t) = \vec{\gamma}(\mathbf{x}, t)$;

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \vec{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} v_j(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \vec{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

2.2.4 Déformations d'un milieu continu

Lors d'une déformation arbitraire, les quantités de compression (ou d'extension) et de distorsion varient d'une position à l'autre dans le continuum. On est donc amené à regarder la déformation de manière locale, et à examiner ses aspects géométriques au voisinage d'un point matériel. Un milieu continu en mouvement subit des déformations lorsque les distances relatives des points matériels varient au cours du temps.

Considérons les points \mathbf{M}_0 et \mathbf{M}_t , image du point \mathbf{M}_0 par le mouvement. Ces points sont respectivement repérés par les coordonnées $\{X_\alpha\}$ et $\{x_i\}$ dans leur repère respectif. On a par définition :

$$x_i = \phi_i(\mathbf{X}, t) \quad (2.9)$$

$$X_\alpha = \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (2.10)$$

Les fonctions ϕ et ψ étant supposées différentiables au voisinage respectivement de \mathbf{M}_0 et \mathbf{M}_t , on peut écrire :

$$dx_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha} dX_\alpha \quad (2.11)$$

$$dX_\alpha = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} dx_i \quad (2.12)$$

Cette relation fait correspondre un vecteur infinitésimal $\overrightarrow{d\mathbf{M}}_0$ au point \mathbf{M}_0 et un vecteur $\overrightarrow{d\mathbf{M}}_t$ au point \mathbf{M}_t . On peut définir le gradient de la transformation :

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha}(\mathbf{X}, t) \quad \text{et} \quad G_{\alpha i} = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

avec

$$\overrightarrow{d\mathbf{x}} = \mathbf{F} \overrightarrow{d\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{d\mathbf{X}} = \mathbf{G} \overrightarrow{d\mathbf{x}} \quad (2.14)$$

Remarque 4. *En considérant la relation :*

$$x_i = \phi_i([\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)], t) \quad (2.15)$$

et en la différentiant, on obtient la relation :

$$\delta_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_j} = F_{i\alpha} G_{\alpha j} \quad (2.16)$$

ce qui conduit à $\det \mathbf{F} \neq 0$ et $\det \mathbf{G} \neq 0$.

De plus, si \mathbf{X} est fixé, l'application : $t \rightarrow \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ est continue sur $[0, t_1]$ et donc ne peut changer de signe sans s'annuler. Comme, en $t = 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ et $\det \mathbf{F} = 1$, on en déduit que $\det \mathbf{F} > 0$ sur cette intervalle.

Remarque 5. Si l'on note $T(\mathbf{M}_0)$ l'espace tangent en \mathbf{M}_0 , i.e. l'espace vectoriel engendré par les vecteur $\overrightarrow{d\mathbf{X}}$, et $T(\mathbf{M}_t)$ l'espace tangent au point \mathbf{M}_t , i.e. l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{d\mathbf{x}}$, l'application \mathbf{F} est une application linéaire de $T(\mathbf{M}_0) \rightarrow T(\mathbf{M}_t)$.

Transformation d'un élément de volume

Considérons dans la configuration $\Omega(t)$, un petit élément de volume dv autour du point matériel \mathbf{M}_t généré par les vecteurs $(\overrightarrow{d\mathbf{u}}, \overrightarrow{d\mathbf{v}}, \overrightarrow{d\mathbf{w}})$, on a la relation :

$$dv = (\overrightarrow{d\mathbf{u}} \wedge \overrightarrow{d\mathbf{v}}) \cdot \overrightarrow{d\mathbf{w}} = \epsilon_{ijk} du_i dv_j dw_k \quad (2.17)$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur des permutations.

Rappel 1. On a les propriétés suivantes :

1. ϵ_{ijk} est antisymétrique par rapport à tout couple d'indices ;
2. $\epsilon_{123} = 1$.

On a alors les composantes $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ et $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$. Les autres prennent la valeur zero. On peut noter les propriétés suivantes :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \quad (2.18)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip} \quad (2.19)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad (2.20)$$

On a par ailleurs, $du_i = F_{i\alpha}dU_\alpha$; $dv_i = F_{i\alpha}dV_\alpha$ et $dw_i = F_{i\alpha}dW_\alpha$. On peut donc écrire :

$$dv = \epsilon_{ijk}F_{i\alpha}F_{j\beta}F_{k\gamma} dU_\alpha dV_\beta dW_\gamma \quad (2.21)$$

et donc

$$dv = \frac{1}{6} \{ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk}F_{i\alpha}F_{j\beta}F_{k\gamma} \} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}dU_\alpha dV_\beta dW_\gamma \quad (2.22)$$

$$= \det \mathbf{F} dV_0 = J(\mathbf{X}, t)dV_0 \quad (2.23)$$

où $J(\mathbf{X}, t)$ est le jacobien du gradient de la transformation.

Transformation d'un élément de surface

Considérons, au point \mathbf{M}_t dans la configuration $\Omega(t)$, un petit élément de surface orientée définie par le vecteur $\vec{n}dS$ que l'on peut écrire :

$$\vec{n}dS = \overrightarrow{d\mathbf{x}} \wedge \overrightarrow{\delta\mathbf{x}} \quad (2.24)$$

où les vecteurs $\overrightarrow{d\mathbf{x}}$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{x}}$ sont deux vecteurs infinitésimaux de la surface. En utilisant les relations, $\overrightarrow{d\mathbf{x}} = \mathbf{F}\overrightarrow{d\mathbf{X}}$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{F}\overrightarrow{\delta\mathbf{X}}$, on peut écrire

$$n_i dS = \epsilon_{ijk} dx_j \delta x_k = \epsilon_{ijk} F_{i\beta} F_{k\gamma} dX_\beta \delta X_\gamma \quad (2.25)$$

soit

$$F_{i\alpha} n_i dS = \epsilon_{ijk} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} dX_\beta \delta X_\gamma \quad (2.26)$$

$$= \left[\frac{1}{6} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ijk} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} \right] \epsilon_{\alpha\beta\gamma} dX_\beta \delta X_\gamma \quad (2.27)$$

$$= (\det \mathbf{F}) N_\alpha d\Sigma \quad (2.28)$$

avec $\overrightarrow{\mathbf{N}} d\Sigma = \overrightarrow{d\mathbf{X}} \wedge \overrightarrow{\delta\mathbf{X}}$. On obtient donc la relation :

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} dS = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \overrightarrow{\mathbf{N}} d\Sigma \quad (2.29)$$

Notion de déformation

Considérons en $\mathbf{M}_0 \in \Omega_0$, deux vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{d\mathbf{M}}_0$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_0$ de composantes $\{dX_\alpha\}$ et $\{\delta X_\beta\}$. De même en $\mathbf{M}_t \in \Omega(t)$, les vecteurs $\overrightarrow{d\mathbf{M}}_t$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_t$ de composantes $\{dx_i\}$ et $\{\delta x_j\}$, définis par $\overrightarrow{d\mathbf{M}}_t = \mathbf{F}\overrightarrow{d\mathbf{M}}_0$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_t = \mathbf{F}\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_0$.

On peut introduire la notion de déformation à l'instant t au voisinage de \mathbf{M}_0 comme la variation du produit scalaire :

$$\overrightarrow{d\mathbf{M}}_t \cdot \overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_t = dx_i \delta x_i = F_{i\alpha} F_{i\beta} dX_\alpha \delta X_\beta = C_{\alpha\beta} dX_\alpha \delta X_\beta \quad (2.30)$$

où $C_{\alpha\beta} = F_{i\alpha} F_{i\beta}$ est appelé tenseur des dilatation et joue le rôle d'une métrique.

Le tenseur des dilatations $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ est par construction un tenseur symétrique. Il possède donc des valeurs propres $\{C_I, C_{II}, C_{III}\}$ ou dilatations principales. Les vecteurs propres associés sont les directions principales de déformations.

Remarque 6. *Les valeurs propres du tenseur des dilatations sont strictement positives.*

– Si λ est une valeur propre, et \vec{w} la direction principale associée, on a :

$$C_{\alpha\beta} w_\beta = \lambda w_\alpha \quad (2.31)$$

On en déduit

$$\lambda w_\alpha w_\alpha = C_{\alpha\beta} w_\beta w_\alpha = F_{i\alpha} w_\alpha F_{i\beta} w_\beta = (F_{i\alpha} w_\alpha)^2 \geq 0 \quad (2.32)$$

\vec{w} étant par définition non nul, on en déduit que $\lambda \geq 0$.

– Si l'inégalité n'est pas stricte, $\lambda = 0$, on en déduit que $F_{i\alpha} w_\alpha = 0$ et donc que $\det \mathbf{F} = 0$ ce qui est en contradiction avec le fait que ϕ et ψ sont des applications inversibles.

Remarque 7. *Le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} est introduit comme :*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.33)$$

Déformation en petites perturbations

Si les configurations Ω_0 et Ω_t sont rapportées à un même repère cartésien, nous pouvons écrire :

$$\phi_i(\mathbf{X}, t) = X_i + u_i(\mathbf{X}, t) \quad (2.34)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ est le déplacement. Le tenseur gradient de transformation \mathbf{F} peut alors s'exprimer comme :

$$F_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (2.35)$$

Le tenseur des dilatations \mathbf{C} a alors pour expression :

$$C_{pq} = F_{ip}F_{iq} = \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) \left(\delta_{iq} + \frac{\partial u_i}{\partial X_q} \right) \quad (2.36)$$

$$= \delta_{ip}\delta_{iq} + \delta_{ip}\frac{\partial u_i}{\partial X_q} + \delta_{iq}\frac{\partial u_i}{\partial X_p} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p}\frac{\partial u_i}{\partial X_q} \quad (2.37)$$

$$= \delta_{pq} + \left(\frac{\partial u_p}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q}{\partial X_p} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial X_p}\frac{\partial u_i}{\partial X_q} \quad (2.38)$$

et le tenseur de Green-Lagrange :

$$E_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q}{\partial X_p} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_p}\frac{\partial u_i}{\partial X_q} \right) \quad (2.39)$$

Le premier terme est un terme linéaire en \mathbf{u} , alors que le second est quadratique.

En notant que le tenseur gradient de déplacement $\nabla \mathbf{u}$ peut se décomposer en une partie symétrique ϵ et une partie antisymétrique ω :

$$\{\nabla \mathbf{u}\}_{ij} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.40)$$

avec

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.41)$$

et

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.42)$$

On peut réécrire le tenseur des déformations de Green-Lagrange sous la forme :

$$E_{ij} = \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\epsilon_{ik}\epsilon_{jk} - \epsilon_{ik}\omega_{jk} - \omega_{ik}\epsilon_{jk} + \omega_{ik}\omega_{jk}) \quad (2.43)$$

L'hypothèse des petites perturbations (HPP) consiste à ne considérer que des transformations dans lesquelles :

$$|\epsilon_{ij}| \ll 1 \quad \text{et} \quad |\omega_{ij}| \ll 1 \quad \forall i, j \quad (2.44)$$

Sous cette hypothèse, qui se traduit également par $|\nabla u| \ll 1$, on peut écrire :

$$E_{ij} \approx \epsilon_{ij} \quad (2.45)$$

et ϵ est une bonne approximation du tenseur des déformations en petites perturbations.

Remarque 8. Si ω est une rotation infinitésimale et $\epsilon = 0$, on a $\nabla \mathbf{u} = \omega$ et $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \omega$. On en déduit alors que

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{I} + \omega)^T (\mathbf{I} + \omega) = \mathbf{I} + \omega^T + \omega + \omega^T \omega \approx \mathbf{I} + \omega^T + \omega = \mathbf{I} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{I}] \approx 0 \quad (2.47)$$

Remarque 9. Le tenseur ω , du fait de son antisymétrie, n'a que trois composantes distinctes : $\omega_{32} = -\omega_{23}$; $\omega_{13} = -\omega_{31}$; $\omega_{21} = -\omega_{12}$. Si l'on note ces composantes $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, on a les relations suivantes :

$$\theta_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{kj} \quad \text{et} \quad \omega_{ik} = \epsilon_{ijk} \theta_j \quad (2.48)$$

En remarquant que, du fait de la symétrie du tenseur des déformations en HPP, $\epsilon_{ijk} \epsilon_{jk} = 0$, on peut également écrire :

$$\theta_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{soit} \quad \theta = \frac{1}{2} \nabla \wedge \vec{\mathbf{u}} \quad (2.49)$$

θ est un vecteur rotation infinitésimale, son amplitude est l'angle de rotation et sa direction celle de l'axe de rotation. On notera que ce vecteur rotation est par nature un vecteur solénoïdal :

$$\nabla \cdot \theta = 0 \quad (2.50)$$

Taux de déformation

Considérons, comme précédemment, en $\mathbf{M}_0 \in \Omega_0$, deux vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{\mathbf{dM}}_0$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_0$ de composantes $\{dX_\alpha\}$ et $\{\delta X_\beta\}$. De même en $\mathbf{M}_t \in \Omega(t)$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{dM}}_t$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_t$ de composantes $\{dx_i\}$ et $\{\delta x_j\}$, définis par $\overrightarrow{\mathbf{dM}}_t = \mathbf{F} \overrightarrow{\mathbf{dM}}_0$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_t = \mathbf{F} \overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_0$.

$\mathbf{M}_0, \overrightarrow{\mathbf{dM}}_0$ et $\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_0$ sont fixes au cours du temps. On peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\mathbf{dM}}_t \cdot \overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_t \right) = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\mathbf{dM}}_t \right) \cdot \overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_t + \overrightarrow{\mathbf{dM}}_t \cdot \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\delta\mathbf{M}}_t \right) \quad (2.51)$$

Considérons la i ème composante de $\overrightarrow{\mathbf{dM}}_t$:

$$\frac{d}{dt} (dx_i) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha} (\mathbf{X}, t) dX_\alpha = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t \partial X_\alpha} (\mathbf{X}, t) dX_\alpha \quad (2.52)$$

En permutant l'ordre des dérivées partielles, on a :

$$\frac{d}{dt} (dx_i) = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} (\mathbf{X}, t) dX_\alpha \quad (2.53)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_\alpha} [v_i(\mathbf{X}, t) dX_\alpha] \quad (2.54)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(\mathbf{X}, t) \frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha} dX_\alpha = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} F_{j\alpha} dX_\alpha = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad (2.55)$$

On peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{dM}_t \cdot \overrightarrow{\delta M}_t \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \delta x_i + dx_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (2.56)$$

$$= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx_j \delta x_i \quad (2.57)$$

$$= 2d_{ij} dx_j \delta x_i \quad (2.58)$$

où nous avons permuté les indices muets. Le tenseur $\mathbf{d}(\mathbf{v})$ est le tenseur taux de déformation, défini sur la configuration spatiale :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.59)$$

2.2.5 Dérivées particulières

Une dérivée particulière est une dérivée par rapport au temps d'une grandeur définie sur un ensemble de particules que l'on suit dans leur mouvement.

Dérivée particulière d'une fonction de points

Considérons une quantité scalaire $k(\mathbf{x}, t)$ en variables d'Euler. En variables de Lagrange, on a :

$$k(\mathbf{X}, t) = k(\cdot, t) \circ \phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.60)$$

Les coordonnées lagrangiennes $\{X_i\}$ étant fixes, on a

$$\frac{d}{dt} k(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial k(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.61)$$

Dans une description eulérienne, il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions composés :

$$\frac{d}{dt} k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial k}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi_j}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial k}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (2.62)$$

$$= \frac{\partial k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} v_j(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.63)$$

Le cas d'une fonction vectorielle, ou tensorielle, ne pose aucune difficulté dans un repère cartésien. Il suffit alors de dériver les composantes. Soit la grandeur vectorielle $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, on a :

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j} v_j \quad \text{soit} \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (2.64)$$

Dérivée particulière d'une intégrale de volume

Considérons un domaine $\omega(t) \subset \Omega(t)$, borné et connexe, que l'on suit dans son mouvement, la quantité scalaire $K(t)$ attachée à $\omega(t)$:

$$K(\omega(t), t) = \int_{\omega(t)} k(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.65)$$

Le problème est ici de calculer la dérivée par rapport au temps de la quantité $K(t)$. La difficulté réside dans le fait que le domaine $\omega(t)$ est entraîné dans le mouvement du milieu continu par le champ de vitesse du milieu $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. La variation au cours du temps de la grandeur $K(t)$ est ainsi due à la variation de la fonction à intégrer et à la variation du domaine d'intégration. On supposera que les fonctions $k(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sont continues sur la fermeture de $\omega(t)$ et à dérivées partielles bornées dans la domaine $\omega(t)$.

Considérons le changement de variable $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$. Dans ce changement de variable, on utilise la relation :

$$dv = J(\mathbf{X}, t)dV \quad (2.66)$$

où $J(\mathbf{X}, t)$ est le jacobien de la transformation tangente. On peut écrire :

$$\frac{d}{dt}K(t) = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} k(\mathbf{x}, t)dv = \frac{d}{dt} \int_{\omega_0} k(\mathbf{X}, t)J(\mathbf{X}, t)dV \quad (2.67)$$

$$= \int_{\omega_0} \left[\frac{dk(\mathbf{X}, t)}{dt} J(\mathbf{X}, t) + k(\mathbf{X}, t) \frac{dJ(\mathbf{X}, t)}{dt} \right] dV \quad (2.68)$$

Remarque 10. Calcul de dJ/dt , on a par définition :

$$J = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} \quad (2.69)$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial t} F_{j\beta} F_{k\gamma} \quad (2.70)$$

puisque chacun des facteurs $F_{i\alpha}$, $F_{j\beta}$, $F_{k\gamma}$ joue le même rôle. On a par ailleurs :

$$\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (2.71)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_\alpha} v_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_\alpha} \quad (2.72)$$

$$= \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_p} F_{p\alpha} \quad (2.73)$$

On en déduit

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_p} F_{p\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} \quad (2.74)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pjk} \left[\frac{1}{6} \epsilon_{pjk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{p\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} \right] \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_p} \quad (2.75)$$

$$= \delta_{ip} \det \mathbf{F} \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_p} = J(\mathbf{X}, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (2.76)$$

soit

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.77)$$

Nous avons alors

$$\frac{d}{dt}K(t) = \int_{\omega_0} \left[\frac{dk}{dt} + k \nabla \cdot \vec{v} \right] J dV \quad (2.78)$$

$$= \int_{\omega(t)} \left[\frac{dk}{dt} + k \nabla \cdot \vec{v} \right] dv \quad (2.79)$$

En utilisant la définition de la dérivée particulaire :

$$\frac{d}{dt}k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla k \cdot \vec{v} \quad (2.80)$$

On obtient la relation suivante

$$\frac{d}{dt}K(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k \vec{v}) \right] dv \quad (2.81)$$

ce qui peut encore s'écrire en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{d}{dt}K(t) = \int_{\omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dv + \int_{\partial \omega(t)} (k \vec{v}) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.82)$$

où \vec{n} est le vecteur normal, sortant, à la frontière $\partial \omega(t)$ du domaine $\omega(t)$. Le premier terme traduit la variation de $K(t)$ lorsque ω est supposé fixe, le second terme est un terme de flux au travers de la frontière et seule la vitesse sur la frontière intervient.

Ce calcul se généralise aisément au cas de grandeur vectorielle :

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{k} \otimes \vec{v}) \right] dv \quad (2.83)$$

$$= \int_{\omega(t)} \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} dv + \int_{\partial \omega(t)} [\vec{k} \otimes \vec{v}] \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.84)$$

Remarque 11. Dans le cas où la fonction $k(\mathbf{x}, t)$ et le champ de vitesse $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$ sont continuellement dérivables par morceaux dans le domaine $\omega(t)$, on peut supposer que l'ouvert $\omega(t)$ est partagé en un domaine $\omega_1(t)$ et un domaine $\omega_2(t)$ par une surface $\gamma(t)$ en mouvement à la vitesse \vec{W} . Les fonctions $k(\mathbf{x}, t)$ et le champ de vitesse $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$ sont alors supposés continus dans $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$, mais peuvent être discontinus au travers de la surface $\gamma(t)$.

Pour chaque domaine $\omega_i(t)$ on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}K(t) = \int_{\omega_i(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dv + \int_{\partial_i \omega(t)} (k \vec{v}) \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\gamma(t)} k^{(i)} (\vec{W} \cdot \vec{\nu}^{(i)}) d\gamma \quad (2.85)$$

avec $\nu^{(1)} = -\nu^{(2)}$ et $\partial_i \omega(t) = \partial \omega_i(t) - \gamma(t)$ En ajoutant membre à membre on obtient alors :

$$\frac{d}{dt}K(t) = \int_{\omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dv + \int_{\partial \omega(t)} (k \vec{v}) \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\gamma(t)} [[k]] (\vec{W} \cdot \vec{\nu}) d\Gamma \quad (2.86)$$

où $[[k]] = k^{(2)} - k^{(1)}$

2.3 Lois de conservation

2.3.1 Préliminaires

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats mathématiques sans démonstration.

Considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on dira qu'un ensemble \mathcal{D} de parties de Ω est dense dans Ω si pour tout point $\mathbf{M} \in \Omega$ et pour tout voisinage $\mathcal{O}(\mathbf{M})$ du point \mathbf{M} , il existe un ouvert ω tel que: $\omega \in \mathcal{D}$, $\mathbf{M} \in \omega$, $\omega \subset \mathcal{O}(\mathbf{M})$.

Si une fonction ϕ est une application intégrable de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et si

$$\int_{\omega} \phi(\mathbf{x}) dv = 0 \quad \forall \omega \in \mathcal{D}$$

alors $\phi(x) = 0$, presque pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ (p.p. $\mathbf{x} \in \Omega$). La notion de presque pour tout signifie $\forall \mathbf{x} \in \Omega - \mathcal{N}$, où \mathcal{N} est un ensemble de mesure nulle:

- dans \mathbb{R}^3 : une surface régulière;
- dans \mathbb{R}^2 : une courbe régulière;
- dans \mathbb{R} : un ensemble dénombrable de points.

2.3.2 Loi de conservation de la masse

La masse d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante. Considérons un milieu physique occupant dans \mathbb{R}^3 un volume $\Omega(t)$ et soit une partie $\omega(t) \subset \Omega(t)$, sa masse est définie par

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.87)$$

où $\rho(\mathbf{x}, t)$ est la densité volumique de masse définie en tout point \mathbf{x} à l'instant t .

La loi de conservation de la masse se traduit simplement par:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}}) \right] dv = 0, \quad \forall \omega(t) \subset \Omega(t) \quad (2.88)$$

$$= \int_{\omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial \omega(t)} (\rho \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma = 0 \quad (2.89)$$

le dernier terme est ici un flux de masse au travers de la surface $\partial \omega(t)$

On en déduit que p.p. $\mathbf{x} \in \Omega(t)$, on a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2.90)$$

soit encore

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}(\ln \rho) + \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque 12. Dans le cas d'un milieu incompressible, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ et donc

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (2.94)$$

$$\frac{d}{dt}(\ln \rho) = 0 \quad (2.95)$$

Remarque 13. La loi de conservation de la masse a une importante conséquence dès lors que l'on s'intéresse à la conservation de quantités définies comme des densités volumiques :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho B(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho B) + \nabla \cdot (\rho B \vec{v}) \right] dv \quad (2.96)$$

$$= \int_{\omega(t)} \left[B \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right\} + \rho \frac{\partial B}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla B \right] dv \quad (2.97)$$

soit encore

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho B(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \rho \frac{dB}{dt} dv \quad (2.98)$$

2.3.3 Loi de conservation de la quantité de mouvement

Il s'agit d'une généralisation au cas des milieux continus de la loi fondamentale de la dynamique. La variation du torseur des quantités de mouvement est égale au torseur des forces extérieures appliquées au système. Le torseur des quantités de mouvements est défini par :

- sa résultante : $\int_{\omega(t)} \rho \vec{v} dv$;
- son moment par rapport à l'origine : $\int_{\omega(t)} \overrightarrow{\text{OM}} \wedge \rho \vec{v} dv$.

Les forces extérieures sont ici de deux types :

- Les forces extérieures au système $\Omega(t)$ qui sont créés par des corps extérieurs au système dont le mouvement est envisagé. Cette notion est relative. Si l'on étudie le mouvement d'un corps matériel et du champ magnétique, les forces électromagnétiques sont internes; si le mouvement du corps matériel est seul considéré, le champ est un agent extérieur à ce corps ainsi que les forces électromagnétiques. Ces forces sont généralement décrites par un champ de densité de forces volumiques, $\vec{f}(\mathbf{x}, t)$.

- Les forces extérieures au domaine $\omega(t)$ et intérieures au domaine $\Omega(t)$. Il s'agit des forces de contraintes internes. Elles représentent les actions exercées par les parties du système extérieures à $\omega(t)$. Elles sont classiquement définies comme une densité surfacique de forces traduisant des interactions locales de contact. Elles ne dépendent que de la position du point \mathbf{x} et de la direction locale de la surface de contact $\vec{\mathbf{n}}$: $\vec{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t, \vec{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{\mathbf{n}}$.

La première équation généralise la seconde loi de Newton: le taux de variation de la quantité de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le système matériel.

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \vec{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}}) \right] dv \quad (2.99)$$

$$= \int_{\omega(t)} \vec{\mathbf{f}} \, dv + \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\gamma \quad (2.100)$$

$$= \int_{\omega(t)} \vec{\mathbf{f}} \, dv + \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dv \quad (2.101)$$

On en déduit p.p. $\mathbf{x} \in \Omega(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot [\rho \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\sigma}] = \vec{\mathbf{f}} \quad (2.102)$$

Remarque 14. On peut noter que $\rho \vec{\mathbf{v}}$ est la densité volumique d'impulsion du milieu et que la loi précédente peut s'écrire:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot \Pi = \vec{\mathbf{f}} \quad (2.103)$$

En notant ici $\Pi = \rho \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\sigma}$. On peut remarquer que Π est un tenseur symétrique dont la signification est immédiate:

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial(\rho \vec{\mathbf{v}})}{\partial t} \, dv + \int_{\partial\omega(t)} \Pi \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\gamma = \int_{\omega(t)} \vec{\mathbf{f}} \, dv \quad (2.104)$$

Le tenseur Π est donc le tenseur densité de flux d'impulsion.

En tenant compte de la loi de conservation de la masse, on peut réécrire cette loi sous forme non conservative

$$\rho \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \vec{\mathbf{f}} \quad (2.105)$$

Remarque 15. la condition aux frontières naturellement associée à la conservation de la quantité de mouvement s'écrit simplement pour tout point $\mathbf{x} \in \partial\omega(t)$:

$$\vec{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t, \vec{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \quad (2.106)$$

soit

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad (2.107)$$

A partir de la loi de conservation des moments angulaires, si l'on note x_i les composantes du vecteur $\overline{\mathbf{OM}}$, on obtient en tenant compte de la loi de conservation de la quantité de mouvement et la relation $x_{j,l} = \delta_{jl}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dv = \int_{\omega(t)} \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k dv + \int_{\partial\omega(t)} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l d\gamma \quad (2.108)$$

$$= \int_{\omega(t)} \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k dv + \int_{\omega(t)} [\epsilon_{ilk} \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l}] dv \quad (2.109)$$

On en déduit

$$\epsilon_{ilk} \sigma_{kl} = 0 \quad (2.110)$$

et donc que $\forall i$ et $\forall j$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.111)$$

ce qui établit que le tenseur des contraintes σ est symétrique.

Remarque 16. *Nous avons décrit le cadre le plus classique des théories des milieux continus. On peut cependant revenir sur les hypothèses faites.*

- *Il y a tout d'abord le fait que les forces d'interactions sont des efforts de contacts. On peut envisager le cas où les différentes parties de Ω exerceraient les unes sur les autres des efforts à distances. Ces efforts sont alors en général connus et viendront en quelque sorte s'ajouter aux efforts $\vec{\mathbf{f}}$ traduisant les efforts extérieurs à Ω .*
- *Si l'on estime que pour représenter les forces extérieures il faille ajouter à une densité volumique de forces $\vec{\mathbf{f}}$ une densité volumique de couples Γ , il convient d'ajouter au second membre un terme : $\int_{\omega(t)} \Gamma dv$, la relation déduite de la loi de conservation des moments angulaires s'écrit :*

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{kl} + \Gamma_i = 0 \quad (2.112)$$

Le tenseur n'est plus alors symétrique. Par contre les autres résultats restent valables.

- *Si l'on suppose que les forces d'interactions ne sont pas correctement représentées par une densité surfacique $\vec{\mathbf{T}}$ et qu'il convienne d'y ajouter une densité surfacique de couples, les efforts d'interaction ne sont plus convenablement décrits par le champ de tenseur de contrainte σ et l'on doit avoir recours à des théories plus avancées comme celle des milieux de Cosserat ou les théories de second gradient.*

2.3.4 Loi de conservation de l'énergie

Il s'agit ni plus ni moins que de l'application du premier principe de la thermodynamique aux milieux continus.

On introduit l'énergie interne d'une partie $\omega(t)$ de $\Omega(t)$ à partir de l'énergie interne spécifique

$$\mathcal{E}_i(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho e(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.113)$$

et l'énergie cinétique

$$\mathcal{E}_c(\omega(t)) = \frac{1}{2} \int_{\omega(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dv = \frac{1}{2} \int_{\omega(t)} \rho \vec{v}^2 \, dv \quad (2.114)$$

et donc l'énergie totale spécifique

$$\mathcal{E}(\omega(t)) = \mathcal{E}_i(\omega(t)) + \mathcal{E}_c(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \, dv \quad (2.115)$$

Pour compléter, on peut définir les apports de chaleur par unité de temps pour la partie $\omega(t) \subset \Omega(t)$

$$Q(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} r(\mathbf{x}, t) \, dv - \int_{\partial\omega(t)} \vec{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{n} \, d\gamma \quad (2.116)$$

où $r(\mathbf{x}, t)$ est une densité volumique de production interne de chaleur (radiation ou réactions chimiques par exemple), et $\vec{q}(\mathbf{x}, t)$ le vecteur courant de chaleur.

La puissance réelle des efforts extérieurs est donnée par :

$$\mathcal{P}_{(e)}(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dv + \int_{\partial\omega(t)} \vec{T} \cdot \vec{v} \, d\gamma \quad (2.117)$$

Le taux de variation de l'énergie totale est égale à la puissance des forces extérieures appliquées au système plus les apports de chaleur par unité de temps.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\omega(t)) = \mathcal{P}_{(e)}(\omega(t)) + Q(\omega(t)) \quad (2.118)$$

soit

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \, dv = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left\{ \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \vec{v} \right\} \right] \, dv \quad (2.119)$$

$$= \int_{\omega(t)} [\vec{f} \cdot \vec{v} + r] \, dv + \int_{\omega(t)} \nabla \cdot [\vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \vec{q}] \, dv \quad (2.120)$$

On en déduit p.p. $\mathbf{x} \in \Omega(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left\{ \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \vec{v} - \vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{q} \right\} = \vec{f} \cdot \vec{v} + r \quad (2.121)$$

Remarque 17. cette équation peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \{ \mathbf{J} \} = \vec{f} \cdot \vec{v} + r \quad (2.122)$$

où $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{(w)} + \mathbf{J}_{(th)} + \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \vec{v}$, avec $\mathbf{J}_{(w)}$ le vecteur densité de flux associé aux efforts internes et $\mathbf{J}_{(th)}$ le vecteur densité de flux associé aux apports de chaleur.

Remarque 18. *En tenant compte de la loi de conservation de la masse, on peut écrire*

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) dv = \int_{\omega(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) dv = \int_{\omega(t)} \left[\rho \frac{de}{dt} + \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right] dv \quad (2.123)$$

En utilisant la relation

$$\int_{\omega(t)} \nabla \cdot [\vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}] dv = \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{v} dv + \int_{\omega(t)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v} dv \quad (2.124)$$

et en tenant compte de la loi de conservation de la quantité de mouvement, on obtient alors la loi non conservative

$$\int_{\omega(t)} \rho \frac{de}{dt} dv = \int_{\omega(t)} [r + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q}] dv \quad (2.125)$$

On en déduit p.p. $\mathbf{x} \in \Omega(t)$

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v} + r - \nabla \cdot \vec{q} \quad (2.126)$$

Remarque 19. *de façon générale on peut considérer*

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} v_{i,j} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} (r - q_{i,i}) \quad (2.127)$$

comme respectivement le taux d'énergie spécifique reçue due aux forces intérieures et le taux de chaleur spécifique reçue par la particule. Leur somme est égale au taux d'énergie interne spécifique.

Remarque 20. *la condition au limite naturelle, associée à une surface libre est $\forall \mathbf{x} \in \partial\omega(t)$*

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = \omega \quad (2.128)$$

2.3.5 Production d'entropie

On introduit la température comme un champ de variables scalaires intensives, positives, définies à chaque instant t en tout point \mathbf{x} : $T(\mathbf{x}, t)$.

L'entropie du système $\omega(t)$ est définie à partir de la densité d'entropie spécifique :

$$S(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho s(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.129)$$

Le second principe postule que le taux de production d'entropie du système est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçu divisé par la température.

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\omega(t)} \frac{r}{T} dv - \int_{\partial\omega(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d\gamma \quad (2.130)$$

On a donc

$$\int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \vec{v}) \right] dv \geq \int_{\omega(t)} \frac{r}{T} dv - \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \frac{\vec{q}}{T} dv \quad (2.131)$$

On en déduit p.p. $\mathbf{x} \in \Omega(t)$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \vec{v}) + \nabla \cdot \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (2.132)$$

En tenant compte de la conservation de la masse, on a la relation :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (2.133)$$

En tenant compte de la loi de conservation de l'énergie on peut écrire

$$r = \rho \frac{de}{dt} - \sigma : \nabla \vec{v} + \nabla \cdot \vec{q} \quad (2.134)$$

d'où

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} \left[\rho \frac{de}{dt} - \sigma : \nabla \vec{v} + \nabla \cdot \vec{q} \right] \geq 0 \quad (2.135)$$

en utilisant

$$\nabla \cdot \frac{\vec{q}}{T} = \frac{1}{T} \nabla \cdot \vec{q} - \vec{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \quad (2.136)$$

et en multipliant par T ($T > 0$)

$$\rho \left[T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right] + \sigma : \nabla \vec{v} - \vec{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.137)$$

Remarque 21. *le taux de production d'entropie est associé au travail des efforts internes qui se transforme en énergie interne ou en chaleur, ou, en l'absence de champ extérieur, à la non uniformité des grandeurs intensives du système.*

On peut introduire à ce stade la densité d'énergie libre spécifique $\psi(\mathbf{x}, t) = e - Ts$. On a

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{dT}{dt} s = \frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt} \quad (2.138)$$

d'où

$$\sigma : \nabla \vec{v} - \rho \left[\frac{d\psi}{dt} + \frac{dT}{dt} s \right] - \vec{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.139)$$

Cas d'un milieu thermoélastique

Pour un milieu thermoélastique en petites perturbations, on peut prendre comme variables caractérisant l'état thermodynamique du système: ϵ et T . Dans ce cas, $\psi = \psi(\epsilon, T)$, et

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} : \mathbf{d} + \frac{\partial\psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} \quad (2.140)$$

où $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\vec{\mathbf{v}})$ est le tenseur des taux de déformation. En utilisant cette relation et en notant que, du fait de la symétrie du tenseur des contraintes ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), $\boldsymbol{\sigma} : \nabla\vec{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$, on obtient

$$\left[\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} \right] : \mathbf{d} - \rho \left[s + \frac{\partial\psi}{\partial T} \right] \frac{dT}{dt} - \vec{\mathbf{q}} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.141)$$

On peut montrer que cette inégalité implique les relation suivante:

$$\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} = 0 \quad (2.142)$$

$$s + \frac{\partial\psi}{\partial T} = 0 \quad (2.143)$$

$$-\vec{\mathbf{q}} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.144)$$

Remarque 22. $\vec{\mathbf{q}}$ et ∇T ne peuvent donc faire un angle aigu. La chaleur diffuse des zones chaudes vers les zones froides.

En écrivant maintenant $e = \psi + Ts$, on a

$$\frac{de}{dt} = \frac{d\psi}{dt} + \frac{dT}{dt}s + T \frac{ds}{dt} \quad (2.145)$$

$$= \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} : \mathbf{d} + \frac{\partial\psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} \right\} + \frac{dT}{dt}s + T \frac{ds}{dt} \quad (2.146)$$

La loi de conservation de l'énergie peut s'écrire

$$\rho \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} : \mathbf{d} + \rho \left[\frac{\partial\psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{dT}{dt}s \right] + \rho T \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \vec{\mathbf{q}} \quad (2.147)$$

en tenant compte des relations précédentes, on arrive à

$$\rho T \frac{ds}{dt} = r - \nabla \cdot \vec{\mathbf{q}} \quad (2.148)$$

Remarque 23. Dans le cas d'un milieu thermoélastique, seul intervient un taux de production réversible d'entropie. Le terme de droite représentant un apport réversible de chaleur du à la conduction et aux sources volumiques.

en notant que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left[-\frac{\partial\psi}{\partial T} \right] = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\epsilon\partial T} : \mathbf{d} - \frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} \quad (2.149)$$

et en définissant le coefficient de chaleur spécifique à volume constant :

$$C_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\epsilon = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \quad (2.150)$$

On obtient l'équation de la chaleur

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} + r + T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \mathbf{d} \right] \quad (2.151)$$

Remarque 24. On note

$$\beta_{ij} = - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \Big|_\epsilon = -\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \epsilon_{ij}} = \rho \frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.152)$$

le tenseurs des coefficients de contrainte thermique. Le tenseur β est un tenseur du second ordre. En l'absence de couplage thermique $\beta : \mathbf{d} = 0$.

Remarque 25. Ces équations peuvent être complétées par la loi de Fourier qui stipule que

$$\bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{K} \nabla T \quad (2.153)$$

Cas d'un fluide parfait

Dans le cas d'un fluide parfait, on admet que l'état thermodynamique du système peut être décrit par deux variables: τ et T , où τ est le volume spécifique défini comme $1/\rho$. Dans ce cas, $\psi = \psi(\tau, T)$, et l'on a :

$$T ds = de + p d \left(\frac{1}{\rho} \right) = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (2.154)$$

où h est l'enthalpie du fluide, $h = h(p, T)$, définie par :

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.155)$$

En notant que, compte tenu de la loi de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} \quad (2.156)$$

La loi de conservation de l'énergie peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left\{ \rho \bar{\mathbf{v}} \left(h + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) + \bar{\mathbf{q}} \right\} = \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + r \quad (2.157)$$

Un raisonnement analogue à celui développé dans le cas thermoélastique conduit à

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} \quad (2.158)$$

et

$$\left[\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \mathbf{I} \right] : \mathbf{d} - \rho \left[s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right] \frac{dT}{dt} - \bar{\mathbf{q}} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.159)$$

ce qui implique les relations :

$$\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \mathbf{I} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad \text{et} \quad p = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad (2.160)$$

$$s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0 \quad (2.161)$$

$$-\bar{\mathbf{q}} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.162)$$

Cas d'un fluide visqueux

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux, il est nécessaire de prendre en compte la dissipation associée à l'existence de force de frottement internes (viscosité). Dans ce cas, il est naturel pour décrire les efforts internes de compléter la description adoptée pour les fluides parfait :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij} \quad (2.163)$$

le premier terme est la pression thermodynamique, définie précédemment qui dépend des variables thermodynamiques (T, τ)

$$p = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad (2.164)$$

et le second terme un tenseur de contrainte de viscosité qui détermine la partie du flux d'impulsion qui n'est pas liée au transport direct de l'impulsion avec la masse du fluide en déplacement.

La loi de conservation de l'énergie peut alors s'écrire, en utilisant l'enthalpie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left\{ \rho \bar{\mathbf{v}} \left(h + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) - \bar{\mathbf{v}} \cdot \sigma + \bar{\mathbf{q}} \right\} = \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + r \quad (2.165)$$

En introduisant l'énergie libre du système, on peut alors réécrire la loi de conservation de l'énergie sous la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{dT}{dt} s \right] + \rho T \frac{ds}{dt} = -p \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (2.166)$$

soit en tenant compte des relations d'état

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \tilde{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (2.167)$$

Remarque 26. *Les deux derniers termes de droite représententent la partie réversible d'apport de chaleur, alors que le premier terme représente la partie irréversible associée à la dissipation visqueuse.*

Remarque 27. *le tenseur $\tilde{\sigma}$ contient un terme sphérique. Il s'ensuit que l'on doit prêter attention, en toute rigueur, à ce que l'on entend par pression.*

2.4 Lois de comportement élémentaires

2.4.1 Thermo-élasticité linéaire

Pour des petites perturbations, y compris en température, à partir d'un état de référence que nous supposons ici caractérisé par une déformation nulle et une température initiale T_0 , on peut linéariser la densité d'énergie libre spécifique :

$$\begin{aligned} \psi(T, \epsilon) = & \psi_0 + \left. \frac{\partial \psi}{\partial T} \right|_0 (T - T_0) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right|_0 \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right|_0 (T - T_0)^2 \\ & + \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \epsilon_{ij}} \right|_0 (T - T_0) \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \right|_0 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \dots \end{aligned} \quad (2.168)$$

avec $\partial \psi / \partial T|_0 = -s_0$ et $\partial \psi / \partial \epsilon_{ij}|_0 = \rho^{-1} \sigma_{ij}^0$, respectivement l'entropie et la contrainte initiale. On a également

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right|_0 = -\frac{1}{T_0} C_0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \epsilon_{ij}} \right|_0 = -\rho^{-1} \beta_{ij}^0 \quad (2.169)$$

et

$$\rho \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \right|_0 = \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \right|_0 = C_{ijkl}^0 \quad (2.170)$$

le tenseur élastique isotherme (d'ordre 4) à la température de référence T_0

On a donc

$$s = s_0 + \frac{1}{T_0} C_0 (T - T_0) + \rho^{-1} \beta_{ij}^0 \epsilon_{ij} \quad (2.171)$$

et

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 - \beta_{ij}^0 (T - T_0) + C_{ijkl}^0 \epsilon_{kl} \quad (2.172)$$

Remarque 28. Dans le cas d'une évolution isentropique, $s = s_0$, on a

$$T - T_0 = -(T_0 / \rho C_0) \beta_{ij}^0 \epsilon_{ij} \quad (2.173)$$

et

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \left[C_{ijkl}^0 + \frac{T_0}{\rho C_0} \beta_{ij}^0 \beta_{kl}^0 \right] \epsilon_{kl} \quad (2.174)$$

qui définit le tenseur élastique adiabatique ou isentropique.

Remarque 29. Considérons maintenant une configuration de référence sans contrainte initiale $\sigma_{ij}^0 = 0$ et à la température de référence T_0 . On considère \mathbf{C} le tenseur élastique isothermique ou isentropique. On a alors la relation généralisée de Hooke

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.175)$$

le tenseur C_{ijkl} a les symétries

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.176)$$

$$= C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (2.177)$$

ce qui réduit le nombre de composantes de 81 à 21.

La représentation la plus générale d'un tenseur d'ordre 4 isotrope est

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \nu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (2.178)$$

Du fait de la symétrie de C_{ijkl} , $C_{ijkl} = C_{jikl}$ (symétrie du tenseur des contraintes), on doit avoir $\mu = \nu$ et la symétrie $C_{ijkl} = C_{klij}$ est automatiquement satisfaite. Dans le cas d'un modèle élastique isotrope linéaire, on peut donc définir le tenseur élastique en fonction de deux paramètres λ et μ qui sont les paramètres de Lamé :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.179)$$

et

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.180)$$

Les paramètres de Lamé ont pour dimension celle d'une contrainte.

2.4.2 Fluide compressible

Dans le cas d'un fluide compressible, les équations de conservation doivent être complétées par des lois de comportement et par la définition du tenseur de contraintes visqueuses σ en termes des autres variables d'écoulement.

Tenseur des contraintes visqueuses

Le frottement interne dans un fluide n'apparaît que lors du glissement relatif des différentes portions du fluide. Par ailleurs, un fluide «classique» est un milieu à «mémoire instantanée», c'est à dire que son état de contrainte visqueuse ne dépend que de quantités caractérisant l'état actuel et du champ de vitesse. Le tenseur $\tilde{\sigma}$ doit donc dépendre du gradient du champ de vitesse : $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\nabla \vec{v}, \rho, T)$. Nous ne considérerons ici que le cas simple d'un fluide isotrope, newtonien.

En première approximation, on peut admettre que cette relation est linéaire par rapport aux composantes du gradient de vitesse. Puisque $\tilde{\sigma}$ doit s'annuler pour $\vec{v} = cst$, l'expression de $\tilde{\sigma}$ ne doit contenir aucun terme indépendant de $\partial v_i / \partial x_k$. D'autre part, σ doit également s'annuler pour toute rotation uniforme puisqu'alors le fluide n'est le siège d'aucun effort de frottement interne. On en déduit que σ ne doit dépendre que de la partie symétrique du gradient du champ de vitesse. La forme la plus générale du tenseur d'ordre 2 satisfaisant à ces différentes conditions, ainsi qu'à la symétrie du tenseur $\tilde{\sigma}$, est donnée par :

$$\sigma = \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{d} \quad (2.181)$$

où $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\vec{v})$ est le tenseur des taux de déformation, et λ, μ sont les coefficients de viscosité de Lamé. Dans le cas général les coefficients λ et μ sont des fonctions de ρ et T .

Par ailleurs, la théorie cinétique des gaz fournit une relation supplémentaire dite relation de Stokes :

$$\lambda = -\frac{2\mu}{3} \quad (2.182)$$

Remarque 30. Cette relation est valide dans le cas tri-dimensionnel. Pour un gaz «N-dimensionnel», on aurait $\lambda = -\frac{2\mu}{N}$. On a bien sur toujours $\lambda = -\frac{2\mu}{3}$ pour l'évolution d'un gaz «3-dimensionnel» ne dépendant que d'une ou deux coordonnées spatiales.

Remarque 31. Pour la plupart des fluides et des gaz, l'expérience montre que le terme $\lambda + \frac{2\mu}{3}$ est très petit et peut être considéré comme nul. En pratique, on a les relations suivantes :

$$\mu \geq 0, \quad \lambda + \frac{2}{N} \mu \geq 0 \quad (2.183)$$

Si $\lambda = \mu = 0$, on a aucune dissipation visqueuse et l'on se trouve dans l'approximation des fluides parfaits, sans effets visqueux. Dans le cas où $\mu > 0$ et $\lambda + \mu > 0$, on a un fluide visqueux.

Lois thermodynamiques

Les lois thermodynamiques définissent l'énergie interne e ou l'enthalpie h comme des fonctions des deux autres variables thermodynamiques choisies entre la pression p , le volume spécifique τ , la température T , l'entropie s ou toute autre variable intensive. Par exemple $e = e(p, T)$, $h = h(p, T)$, ou $\psi = \psi(\tau, T)$.

Dans de nombreuses circonstances, un fluide compressible peut être considéré comme un gaz thermostatiquement parfait, même en présence d'effets visqueux, et l'équation d'état peut s'écrire :

$$p = r \frac{T}{\tau} \quad (2.184)$$

où r est ici une constante par unité de masse et égal à la constante des gaz parfait divisée par le volume moléculaire du fluide.

L'énergie interne e et l'enthalpie h dépendent uniquement de la température, $e = e(T)$ et $h = h(T)$. On peut alors définir les coefficients de chaleur spécifique à volume constant et pression constante.

$$C_v = \left. \frac{\partial e}{\partial T} \right|_V \quad \text{et} \quad C_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p = r + \frac{\partial e}{\partial T} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} r \quad (2.185)$$

où

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.186)$$

avec $C_p > C_v$. Dans des conditions normales (pas de fortes densités ou de hautes températures), les fluides sont bien décrits par un modèle de gaz parfait qui suppose que C_V et C_P sont constantes, $\gamma = 1 + \frac{r}{c_v} > 1$. On peut définir :

$$e = C_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.187)$$

$$h = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.188)$$

d'où

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (2.189)$$

en utilisant la relation thermodynamique

$$T ds = de + p d \left(\frac{1}{\rho} \right) = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (2.190)$$

on en déduit que la variation d'entropie à partir d'un état de référence peut s'écrire :

$$s - s_0 = C_v \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + r \ln \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right) = C_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - r \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad (2.191)$$

$$= -r \ln \left(\frac{(p/p_0)}{(T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)}} \right) \quad (2.192)$$

soit encore

$$s - s_0 = C_v \ln \left(\frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma} \right) = C_v \ln \left(\frac{T/T_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}} \right) \quad (2.193)$$

2.5 Forme générale des lois de conservation

Les lois de conservation pour les variables ρ , $\rho \vec{v}$, $\rho \varkappa$, où l'on note ici \varkappa l'énergie totale par unité de masse $\varkappa = e + \frac{\vec{v}^2}{2}$, peuvent s'écrire de façon générale p.p. $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ sous la forme d'un système d'équations couplés

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \rho \varkappa \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \\ \rho \vec{v} \varkappa - \vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{f} \\ \vec{v} \cdot \vec{f} + r \end{pmatrix} \quad (2.194)$$

On peut définir alors un espace d'états du système $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n_p}$, un vecteur des variables conservatives $\mathbf{U} \in \mathcal{B}$ défini comme

$$\mathbf{U} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \\ \varkappa \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \varkappa \end{pmatrix} \quad (2.195)$$

et n_d fonctions vectorielles $\mathbf{f}^j(\mathbf{U})$, $j = 1, \dots, n_d$, appelées fonctions flux, de \mathcal{B} dans \mathbb{R}^{n_p} définies ici comme

$$\mathbf{f}^j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n_p}^j \end{pmatrix} \quad (2.196)$$

Le système peut alors se réécrire sous la forme dite conservative

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}^j = \mathcal{F} \quad (2.197)$$

où

$$\mathbf{f}^j(\mathbf{U}) = \rho v_j \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \varkappa \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{1j} \\ \sigma_{2j} \\ \sigma_{3j} \\ \sigma_{lj} v_l - q_j \end{pmatrix} \quad (2.198)$$

et

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_l v_l + r \end{pmatrix} \quad (2.199)$$

Ce système exprime formellement la conservation des n_p quantités U_1, U_2, \dots, U_{n_p} . Si $\omega(t)$ est une partie arbitraire de la configuration $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^{n_d}$ et si $\mathbf{\bar{n}} = (n_1, n_2, \dots, n_{n_d})^T$ est le vecteur normal unité, dirigé vers l'extérieur, de la frontière $\partial\omega(t)$, on a la relation classique, sous l'hypothèse de champs continus dans $\omega(t)$:

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} \, dv + \sum_{j=1}^{n_d} \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{f}^j(\mathbf{U}) \cdot n_j \, d\gamma = \int_{\omega(t)} \mathcal{F} \, dv \quad (2.200)$$

qui a une interprétation physique simple : le taux de variation des quantités \mathbf{U} est égal aux flux échangés à travers la frontière plus les termes de sources volumique. Ces équations doivent naturellement être complétées par les lois de comportement.

Il est souvent utile de réécrire ces équations sous forme quasi-linéaire.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^j(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = \mathcal{F} \quad (2.201)$$

où \mathbf{A}^j est une matrice ($n_p \times n_p$) définie comme le jacobien du vecteur flux \mathbf{f}^j

$$\mathbf{A}_{kl}^j(\mathbf{U}) = \frac{\partial f_k^j}{\partial U_l} \quad (2.202)$$

En mécanique des fluides on réécrit parfois ce système sous la forme suivante

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}^{j,e} = \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}^{j,dif} + \mathcal{F} \quad (2.203)$$

afin de distinguer le flux d'Euler et le flux diffusif,

$$\mathbf{f}^{j,e} = \rho v_j \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ \mathcal{X} \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \delta_{3j} \\ v_j \end{pmatrix} \quad (2.204)$$

et

$$\mathbf{f}^{j,dif} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{1j} \\ \tilde{\sigma}_{2j} \\ \tilde{\sigma}_{3j} \\ \tilde{\sigma}_{lj} v_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_j \end{pmatrix} \quad (2.205)$$

Le système peut se réécrire sous la forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^{j,e} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{K}^{jl} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l} \right) + \mathcal{F} \quad (2.206)$$

où

$$\mathbf{f}^{j,dif} = \sum_{l=1}^{n_d} \mathbf{K}^{jl} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_l} \quad (2.207)$$

2.5.1 Lois de discontinuité

Supposons que le domaine ouvert $\omega(t) \subset \Omega(t)$ est partagé en $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ par une surface $\Sigma(t)$ en mouvement avec une vitesse $\vec{\mathbf{w}}$. On définit ν la normale sortante à l'interface dirigée du milieu $\omega_1(t)$ vers le milieu $\omega_2(t)$. L'ensemble des champs sont supposés continus séparément dans $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ mais peuvent être discontinus au travers de la surface $\Sigma(t)$. Nous avons vu que la formule de dérivation particulaire d'une intégrale de volume devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial \omega(t)} (\mathbf{U} \cdot \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma - \int_{\Sigma(t) \cap \omega(t)} [[\mathbf{U}]] \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\nu} d\gamma \quad (2.208)$$

où ν est la normale à l'interface.

On peut également faire intervenir la vitesse relative du milieu par rapport à celle de l'interface $\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}$. Considérons par chacun des milieux $\omega_i(t)$ la dérivée particulaire prise dans le mouvement propre du milieu $\omega_i(t)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d^{(i)}}{dt} \int_{\omega_i(t)} \mathbf{U} dv &= \int_{\omega_i(t)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} dv + \int_{\partial_i \omega(t)} \mathbf{U} \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma + \int_{\Sigma(t) \cap \omega_i(t)} \mathbf{U}(\mathbf{x}^-, t) \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nu}^{(i)} d\gamma \\ &\quad - \int_{\Sigma(t) \cap \omega_i(t)} \mathbf{U}(\mathbf{x}^-, t) (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\nu}^{(i)} d\gamma \end{aligned} \quad (2.209)$$

où $\partial_i \omega(t) = \partial \omega_i(t) - \Sigma(t)$. On a alors, en utilisant $\vec{\nu}^{(2)} = -\vec{\nu}^{(1)}$, et le théorème de la divergence dans chacun des domaines $\omega_i(t)$, dans lesquels les champs sont continus,

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \mathbf{U} dv = \int_{\omega(t)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \vec{\mathbf{v}}) \right\} dv + \int_{\Sigma(t) \cap \omega(t)} [[\mathbf{U} (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\nu}]] d\gamma \quad (2.210)$$

Par ailleurs les lois de conservation sont satisfaites sur le domaine $\omega(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \mathbf{U} dv = \int_{\omega(t)} \mathcal{F} dv + \int_{\partial \omega(t)} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{n}}) d\gamma \quad (2.211)$$

avec ici

$$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{n}}) = \sum_{j=1}^{n_d} \mathcal{A}^j(\vec{\mathbf{n}}) \quad (2.212)$$

et

$$\mathcal{A}^j(\vec{\mathbf{n}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{1j}n_j \\ \sigma_{2j}n_j \\ \sigma_{3j}n_j \\ \sigma_{lj}n_jv_l - q_jn_j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_1v_l + r \end{pmatrix} \quad (2.213)$$

En utilisant le résultat précédent on obtient

$$\int_{\omega(t)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\vec{\mathbf{v}}) \right\} dv = \int_{\omega(t)} \mathcal{F} dv + \int_{\partial\omega(t)} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{n}}) d\gamma - \int_{\Sigma(t) \cap \omega(t)} \llbracket \mathbf{U}(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\nu} \rrbracket d\gamma \quad (2.214)$$

Par ailleurs, en posant $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{n}}) = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{n}}$, avec

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^j \quad (2.215)$$

et

$$\mathbf{A}^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{1j} \\ \sigma_{2j} \\ \sigma_{3j} \\ \sigma_{lj}v_l - q_j \end{pmatrix} \quad (2.216)$$

on a, dans chaque domaine $\omega_i(t)$ la relation suivante

$$\int_{\omega_i(t)} \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \int_{\partial_i\omega_i(t)} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{n}}) d\gamma - \int_{\Sigma(t) \cap \omega_i(t)} \mathcal{A}^{(i)}(\vec{\nu}^{(i)}) d\gamma \quad (2.217)$$

d'où la relation

$$\int_{\omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \int_{\partial\omega(t)} \mathcal{A}(\vec{\mathbf{n}}) d\gamma + \int_{\Sigma(t) \cap \omega(t)} \llbracket \mathcal{A}(\vec{\nu}) \rrbracket d\gamma \quad (2.218)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1(t)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\vec{\mathbf{v}} - \mathbf{A}) - \mathcal{F} \right\} dv + \int_{\omega_2(t)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\vec{\mathbf{v}} - \mathbf{A}) - \mathcal{F} \right\} dv = \\ - \int_{\Sigma(t) \cap \omega(t)} \{ \llbracket \mathbf{U}(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\nu} \rrbracket - \llbracket \mathcal{A}(\vec{\nu}) \rrbracket \} d\gamma \end{aligned} \quad (2.219)$$

soit la loi de discontinuité

$$\llbracket \mathbf{U}(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\nu} \rrbracket = \llbracket \mathcal{A}(\vec{\nu}) \rrbracket \quad (2.220)$$

que l'on peut réécrire sous la forme classique de la condition de Rankine-Hugoniot

$$[[\mathbf{U}]] \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\nu} = [[\mathbf{U}\vec{\mathbf{v}} - \mathbf{A}]] \cdot \vec{\nu} \quad (2.221)$$

$$[[\mathbf{U}]] \vartheta = [[\mathbb{F}(\mathbf{U})]] \cdot \vec{\nu} \quad (2.222)$$

où

$$\mathbb{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}\vec{\mathbf{w}} - \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^j = \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{f}^j(\mathbf{U}) \quad (2.223)$$

et ϑ est la vitesse est la vitesse de propagation du front de discontinuité.

Loi de conservation de la masse

On obtient la relation suivante

$$[[\rho(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\nu}]] = 0 \quad (2.224)$$

on posant $m = \rho(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\nu}$ la densité de flux de masse au travers de la surface $\Sigma(t)$, la relation stipule que cette densité est invariante à la traversée du front de discontinuité.

Si $m = 0$, la surface $\Sigma(t)$ n'est pas traversée par le milieu continu, on parle alors de surface de contact ou de surface de glissement. La vitesse relative du milieu par rapport à $\Sigma(t)$ est tangentielle. La vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ subit une discontinuité à la traversée de $\Sigma(t)$ mais celle-ci est purement tangentielle. C'est le cas par exemple de la surface entre deux liquides non-miscibles en mouvement. La surface de séparation entre une masse d'eau et l'atmosphère constitue en général une surface de contact.

Si $m \neq 0$, le milieu traverse effectivement la surface de discontinuité $\Sigma(t)$ et cette surface est un front d'onde de choc. En général, une explosion dans un milieu y produit une onde de choc.

Loi de conservation de la quantité de mouvement

On a la relation suivante,

$$[[\rho v_i (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\nu}]] - [[\sigma_{ij} \nu_j]] = 0 \quad (2.225)$$

soit en tenant compte de la loi de discontinuité de la masse

$$m [[v_i]] = [[\sigma_{ij} \nu_j]] \quad (2.226)$$

- Dans le cas d'une surface de contact, ou de glissement, $m = 0$, et la relation traduit simplement l'équilibre des forces à l'interface et donc que le vecteur traction pour la direction normale à l'interface est continu à la traversée de $\Sigma(t)$.
- Dans le cas d'une onde de choc, la discontinuité du vecteur traction, pour la direction normale au front d'onde, est proportionnelle à la discontinuité de la vitesse relative, le facteur de proportionalité étant le débit massique m .

Loi de conservation de l'énergie

On a la relation suivante,

$$\llbracket \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{\nu} \rrbracket - \llbracket (v_i \sigma_{ij} - q_j) \nu_j \rrbracket = 0 \quad (2.227)$$

en utilisant les relations

$$\llbracket xy \rrbracket = \llbracket x \rrbracket \langle y \rangle + \langle x \rangle \llbracket y \rrbracket \quad \text{et} \quad \langle x \rangle = \frac{1}{2} (x^{(1)} + x^{(2)}) \quad (2.228)$$

et la loi de conservation de la masse, on peut réécrire la loi de discontinuité sous la forme

$$m \llbracket e \rrbracket + \llbracket v_i \rrbracket \langle \sigma_{ij} \rangle \nu_j + \llbracket q_i \rrbracket \nu_i = 0 \quad (2.229)$$

soit encore dans le cas d'un fluide parfait

$$m \llbracket e \rrbracket + \langle p \rangle \llbracket \vec{v} \cdot \vec{\nu} \rrbracket + \llbracket \vec{q} \cdot \vec{\nu} \rrbracket = 0 \quad (2.230)$$

En fait, les lois de la conduction habituellement retenues excluent la possibilité d'une discontinuité de \vec{q} à travers une surface. Ceci généralement exclut la possibilité d'une surface de discontinuité. C'est pourquoi, en ce qui concerne les discontinuités, le cas adiabatique est le plus intéressant. Dans le cas adiabatique, et pour une surface de contact $m = 0$, le vecteur traction est continu et la vitesse relative devient tangentielle, il en résulte que le vecteur contrainte est orthogonal à la discontinuité de vitesse relative.

